Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Treća nedjelja

Podsjetnik

Definicija

Diskontovana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C sa rokom dospijeća t_2 je:

$$C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Ako je $t_1 = 0$ diskontovanu vrijednost nazivamo *sadašnja vrijednost*.

$$C \exp\left(-\int_{0}^{t} \delta(s)\, ds\right)$$

Funkcija sadašnje vrijednosti

$$v(t) = \exp\left(-\int_{0}^{t} \delta(s)\, ds\right)$$

Sadašnja vrijednost diskretnog novčanog toka

Sadašnja vrijednost kapitala C sa rokom dospijeća t je: $Cv(t)$

Diskretni novčani tok

- Rokovi dospijeća t_1, t_2, ..., t_n
- c_{t_j} – kapital sa rokom dospijeća t_j, $j = 1, ..., n$
- Sada'v snja vrijednost novčanog toka:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{t_j} v(t_j)$$

Neprekidni novčani tok

- $T > 0$ fiksirani trenutak u budućnosti
- Od 0 do T novac se uplaćuje neprikidno
- $M(t)$ – ukupna uplata do trenutka t

Intenzitet uplate $\rho(t)$

$$\rho(t) := M'(t), \qquad M(t) = \int_0^t \rho(s)\, ds.$$

Ako je $0 \leq \alpha < \beta \leq T$ onda je

$$M(\beta) - M(\alpha) = \int_\alpha^\beta \rho(t)\, dt$$

ukupna uplata od trenutka α do trenutka β.

Sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka

Ukupna uplata od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$:

$$M(t + \Delta t) - M(t) = \int_t^{t+\Delta t} \rho(s)\, ds \approx \rho(t)\Delta t$$

Sadašnja vrijednost kapitala $M(t + \Delta t) - M(t)$ je (približno):

$$v(t)\rho(t)\Delta t$$

Sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka:

$$\int_0^T v(t)\rho(t)\, dt$$

Sadašnja vrijednost novčanog toka

Neto sadašnja vrijednost

$$\sum_{c_t \neq 0} c_t v(t) + \int_0^T v(t)\rho(t)\, dt$$

- Ako je $c_t < 0$ – trošak, rashod.
- Interpretacija?
- Razmatra se i $T = \infty$! Konvergencija?

Diskontovana i sadašnja vrijednost

Neka je $t_1 \leq t_2$.

Diskontovana vrijednost

Diskontovana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C sa rokom dospijeća t_2:

$$C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Diskontovana vrijednost koristeći sadašnju vrijednost

$$\begin{aligned} C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right) &= C \exp\left(-\int_{0}^{t_2} \delta(t)\, dt + \int_{0}^{t_1} \delta(t)\, dt\right) \\ &= C \frac{\exp\left(-\int_0^{t_2} \delta(t)\, dt\right)}{\exp\left(-\int_0^{t_1} \delta(t)\, dt\right)} = C \frac{v(t_2)}{v(t_1)} \end{aligned}$$

Akumulacija i funkcija sadašnje vrijednosti

Neka je $t_1 > t_2$.

Akumulacija

Akumulirana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C uloženog u trenutku t_2:

$$C \exp\left(\int_{t_2}^{t_1} \delta(t)\, dt\right) = C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Akumulacija koristeći sadašnju vrijednost

$$C \frac{v(t_2)}{v(t_1)}$$

Isto kao u prethodnom slučaju!

Vrednovanje kapitala

Za *proizvoljne* trenutke t_1 i t_2

Ako vrijednost kapitala u trenutku t_1 iznosi C, onda je vrijednost tog kapitala u trenutku t_2:

$$C\frac{v(t_2)}{v(t_1)}$$

Vrednovanje novčanih tokova u proizvoljnom trenutku

- t_0 – proizvoljni trenutak
- c_t – diskretni novčani tok
- $\rho(t)$ – intenzitet plaćanja

Vrijednost novčanog toka u trenutku t_0

$$\sum_{c_t \neq 0} c_t \frac{v(t)}{v(t_0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(t)}{v(t_0)} \rho(t)\, dt$$

Sadasnja Vrijednost novčanog toka u trenutku $(t_0 = 0)$

$v(0) = e^0 = 1$

$$\sum_{c_t \neq 0} c_t v(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \rho(t)\, dt$$

Interpretacija?

Vrednovanje novčanih tokova

Za *proizvoljne* trenutke t_1 i t_2

$$[\text{V.N.T. u trenutku } t_1] \cdot v(t_1) = [\text{V.N.T. u trenutku } t_2] \cdot v(t_2)$$

V.N.T. – vrijednost novčanog toka

EXAMPLE 2.7.2

The force of interest at any time t, measured in years, is given by

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04 + 0.005t & \text{for } 0 \leq t < 6 \\ 0.16 - 0.015t & \text{for } 6 \leq t < 8 \\ 0.04 & \text{for } t \geq 8 \end{cases}$$

(a) Calculate the value at time 0 of £100 due at time $t = 8$.

(b) Calculate the accumulated value at time $t = 10$ of a payment stream of rate $\rho(t) = 16 - 1.5t$ paid continuously between times $t = 6$ and $t = 8$.

Solution

(a) We need the present value of £100 at time 8, i.e., $100/A(0,8)$ with the accumulation factor

$$\begin{aligned} A(0,8) &= A(0,6) \times A(6,8) \\ &= \exp\left(\int_0^6 0.04 + 0.005t\ dt\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_6^8 0.16 - 0.015t\ dt\right) \\ &= \exp(0.44) \end{aligned}$$

leading to the present value of $£100/e^{0.44} = £64.40$

(b) The accumulated value is given by the accumulation of each payment element $\rho(t)\mathrm{d}t$ from time t to 10

$$\int_6^8 A(t,10).\rho(t)\mathrm{d}t$$

Using the principle of consistency, we can express the accumulation factor as easily found quantities, $A(0,10)$ and $A(0,t)$ as

$$A(t,10) = \frac{A(0,10)}{A(0,t)} = e^{0.88-0.16t+0.0075t^2}$$

for $6 \leq t \leq 8$. The required present value is then obtained via integration by parts as £12.60.

Prihod od kamata

Interest income

- C – uloženi kapital
- $i(t)$ kamata za period od t do $t+1$

Cilj: prihod od kamata na kapital (a ne akumulacija kapitala)

Jednostavni slučaj: isplata $Ci(t)$ na kraju svake godine

Slučaj sa n plaćanja

Inerest income

- Period od t_0 do $t > t_0$
- n plaćanja
- Razmak između isplata $h = \frac{t - t_0}{n}$
- Isplate u trenucima $t_0 + h$, $t_0 + 2h$, ..., $t_0 + nh$
- Po definiciji $i_h(t)$ isplata u trenutku $t + jh$, $j = 1 \ldots n$:

$$Chi_h(t_0 + jh)$$

Ukupan prihod

$$\sum_{j=0}^{n-1} Chi_h(t_0 + jh)$$

Neprekidni slučaj

Interest income

Broj plaćanja između t i t_0 teži beskonačnosti: $n \to \infty$

$$\sum_{j=0}^{n-1} Chi_h(t_0 + jh) \quad \to C \int_{t_0}^{t} \delta(t)\, dt$$

Zašto?

Ukupan prihod od kamate (Total interest received)

$$I(t) := C \int_{t_0}^{t} \delta(t)\, dt$$

Intenzitet prihoda od kamate (Rate of payment of interest income)

$$I'(t) = C\delta(t)$$

Prihod od kamate kao neprekidni novčani tok

Posmatramo interval $[0, T]$

Neprekidni novčani tok

Intenzitet plaćanja ρ,

$$M(t) = \int_0^T \rho(t)\, dt.$$

Neprekidni prihod od kamate

Intenzitet prihoda od kamate $C\delta$

$$I(t) = \int_0^T C\delta(t)\, dt = C \int_0^T \delta(t)\, dt$$

Sadašnja vrijednost prihoda od kamate

Sadašnja vrijednost neprekidnog novčanog toka

Intenzitet plaćanja ρ,

$$\int_0^T v(t)\rho(t)\,dt.$$

Sadašnja vrijednost neprekidnog prihoda od kamate

Intenzitet prihoda od kamate $C\delta$

$$\int_0^T Cv(t)\delta(t)\,dt = C\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt$$

Tehnički komentar

Primijetimo:

$$\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt = 1 - v(T)$$

Zašto?

Tehnički komentar

Primijetimo:

$$\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt = 1 - v(T)$$

Zašto?

- Smjena $u = \int_0^t \delta(s)\,ds$
- $du = \delta(t)dt!$
- Po definiciji $v = e^{-u}$

Prihod od kamata i dekompozicija kapitala

Dekompozicija

$$C = C\int_0^T v(t)\delta(t)\,dt + Cv(T)$$

Interpretacija?

Slučaj $T = +\infty$

$$C = C\int_0^{+\infty} v(t)\delta(t)\,dt$$

Interpretacija?